

Planification statique

Programmation linéaire

Programmation linéaire

- ④ Un des outils les plus puissants et les plus utilisés en applications « industrielles » parmi les technologies d'aide à la décision
 - ④ Planification de la production
 - ④ Répartition des ressources
 - ④ Choix de produits à fabriquer
 - ④ Planification d'investissements
 - ④ Établissement de routes et d'horaires
 - ④ Planification des acheminements
 - ④ Logistique
 - ④ Distribution
 - ④ Affectation et gestion du personnel
 - ④ Gestion de projet, ...

Programmation linéaire (2)

- ④ Première méthodologie proposée (George B. Dantzig – 1949)
- ④ Facile à résoudre: méthode du *simplexe*
- ④ Permet de traiter de façon systématique des problèmes complexes où plusieurs activités sont en compétition pour des ressources limitées et un objectif global (maximisation des profits, minimisation des coûts, ...) est recherché
- ④ L'approximation linéaire offre de bonnes indications
- ④ « En prime » des informations intéressantes: coûts *marginiaux* ou d'*opportunité* : la valeur d'une unité supplémentaire de produit ou de ressource étant donné l'état actuel du système
- ④ Analyses de scénarios
- ④ A la base d'autres approches plus puissantes

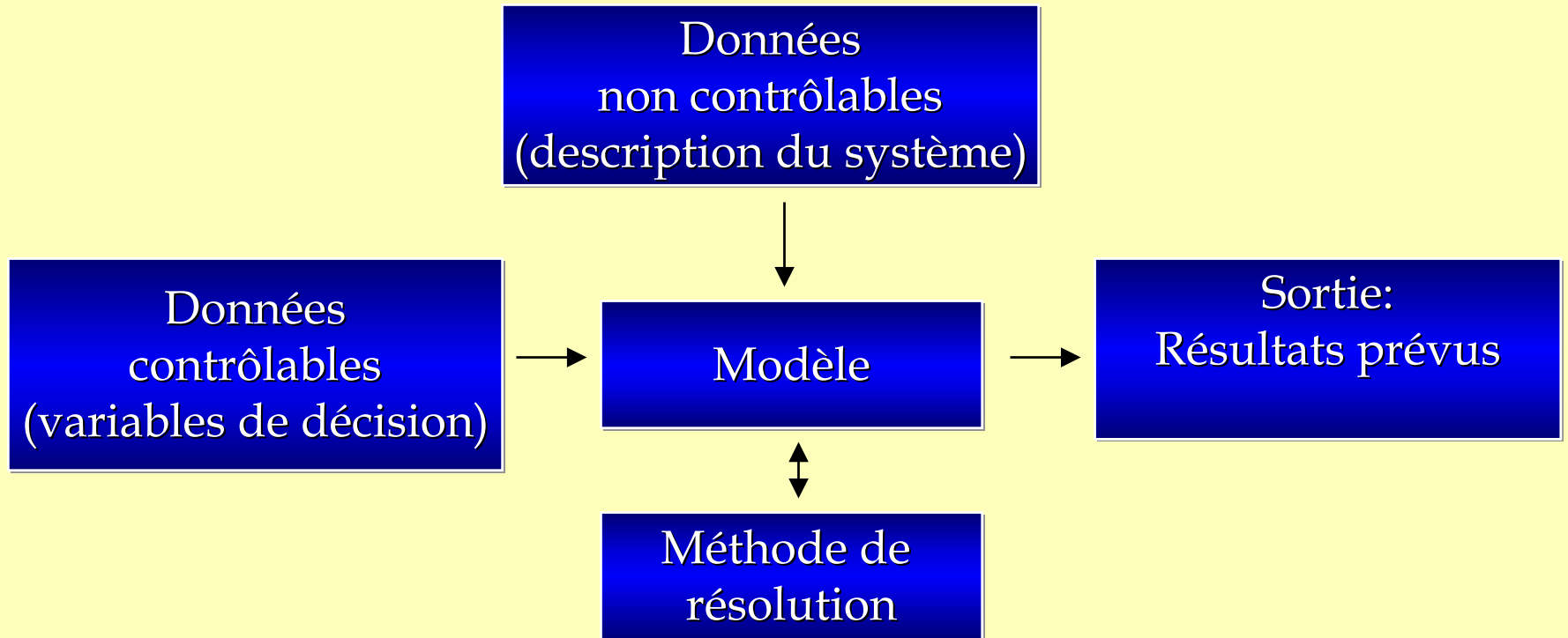
— Programmation linéaire – Approche —

- ① Analyser et comprendre la situation
- ① Identifier le problème
- ① Données disponibles?
- ① Bâtir un modèle
- ① Résoudre le modèle
- ① Placer les résultats dans le contexte du problème initial
- ① Effectuer des analyses
- ① Boucles de feed-back
- ① Décisions

Nos objectifs

- ① Se familiariser avec la modélisation à travers de cas (très) simples
- ① Comprendre les principes et les limitations de la programmation linéaire
- ① Illustrer l'approche

Modèle + Méthode de résolution



Modèle

- ① Paramètres (données non contrôlables) qui décrivent le système et son état actuel
- ① **Objectif** à atteindre; normalement en termes économiques : minimiser les coûts, maximiser les profits, ...
- ① Des **actions** qui permettent de modifier l'état du système et d'atteindre les objectifs – Les paramètres contrôlables.
Les **intensités** de ces actions constituent les **variables de décision**
- ① Des **relations** entre les données du système et les actions (consommation de ressources pour produire une unité, par exemple)
- ① Des **contraintes** qui limitent la portée des actions (disponibilités de ressources, capacité de production, limites du marché, par exemple)
- ① **Les relations et les contraintes décrivent le système et son comportement**

Planification des opérations – Répartition des ressources : Exemple

- ① Une compagnie produit des bâtons de hockey et des jeux d'échecs. Chaque bâton rapporte un profit de 2\$ et chaque jeu un profit de 4\$.
- ① La compagnie utilise trois types de machines : A, B et C. Pour la prochaine période, l'entreprise dispose de 120 heures de machines A, 72 heures de machines B et 10 heures de machines C.
- ① La fabrication de chaque bâton nécessite 4 heures de travail sur des machines de type A et 2 heures sur des machines B.
- ① La fabrication de chaque jeu d'échecs nécessite 6 heures de machines A, 6 heures de machines B et 1 heure de machines C.
- ① Assumons (pour simplifier) que les coûts d'achat des ressources et de production ont été comptabilisés dans les profits unitaires et que la compagnie pourra vendre toute sa production.
- ① Combien de bâtons de hockey et combien de jeux d'échecs produire afin de maximiser les profits?

Solution simple?

- ① Le profit unitaire d'un jeu d'échecs est deux fois plus grand que celui d'un bâton de hockey. Pourquoi de pas produire uniquement des jeux d'échecs?
- ① 10 jeux pour un profit de 40\$ et il reste 60 heures sur la machine A et 12 sur la machine B
- ① Ou uniquement des bâtons?
- ① Ou alors une combinaison de jeux et de bâtons? Laquelle?
- ① Même pour un problème très simple, le nombre de solutions réalisables est très grand et beaucoup semblent être intéressantes
- ① Besoin d'un modèle et d'une méthode systématique de recherche de solution

Modélisation

- ④ Comprendre le problème
- ④ Quelles sont les données non contrôlables?
 - ④ Les lignes de produits possibles et les profits espérés
 - ④ L'équipement les ressources disponibles
 - ④ Les recettes de fabrication
- ④ Quelles sont les facteurs contrôlables? Les **décisions** :
Quoi et combien produire : les variables de décision
- ④ Quel est l'objectif? Maximiser le profit total
- ④ Quelles sont les contraintes? Le temps disponible sur chaque machine
- ④ Ecrire une description « verbale » de l'objectif et de chaque contrainte
- ④ Ecrire l'objectif et les contraintes en « forme mathématique », en fonction des variables de décision et des données du problème

Modélisation

Variables de décision

- ④ Les éléments du problème que le gestionnaire **peut contrôler**
- ④ Les **actions** possibles : fabriquer
 - ④ des bâtons de hockey
 - ou
 - ④ des jeux d'échecs
 - ④ ou les deux
- ④ Les **décisions**
 - ④ **combien** de bâtons de hockey fabriquer
 - ④ **combien** de jeux d'échecs fabriquer

Modélisation – Fonction-objectif

- ④ Maximiser le profit total =
le profit provenant de la vente des bâtons +
le profit provenant de la vente des jeux
- ④ Profit provenant de la vente des bâtons =
profit pour un bâton * *nombre de bâtons vendus*
- ④ Profit provenant de la vente des jeux =
profit pour un jeu * *nombre de jeux vendus*

Modélisation – Contraintes

Contraintes de fabrication - disponibilité

- ④ Nombre d'heures de machine A utilisées \leq
Nombre d'heures de machine A disponibles
- ④ Nombre d'heures de machine A utilisées =
nombre d'heures de machine A utilisées pour fabriquer des bâtons +
nombre d'heures de machine A utilisées pour fabriquer des jeux
- ④ Nombre d'heures utilisées pour fabriquer des jeux =
nombre d'heures nécessaire pour fabriquer un jeu * *nombre de jeux
fabriqués*
- ④ Nombre d'heures utilisées pour fabriquer des bâtons =
nombre d'heures nécessaire pour fabriquer un bâton* *nombre de
bâtons fabriqués*

Le modèle

Variables de décision

🌐 H = nombre de bâtons de hockey à fabriquer

🌐 C = nombre de jeux d'échecs à fabriquer

Fonction-objectif

🌐 Maximiser $Z = 2\$H + 4\C

Contraintes de fabrication - disponibilité

🌐 $4 H + 6 C \leq 120$ (heures machines A)

🌐 $2 H + 6 C \leq 72$ (heures machines B)

🌐 $1 C \leq 10$ (heures machines C)

Contraintes de signe

$H, C \geq 0$ (non-négativité)

Principes

Effet (coût, intensité, consommation, etc.) total
=
somme des effets individuels

Effet individuel d'une action
=
effet unitaire * intensité de l'action

Hypothèses (principes) de la programmation linéaire

- ① Proportionnalité
- ① Aditivité
- ① Continuité (des variables de décision)

Répartition des ressources

🌐 Étant donné

🌐 des ressources en quantités limitées,

🌐 une gamme de produits « réalisables »,

🌐 la « recette » de production de chaque produit : la quantité de chaque ressource consommée pour en fabriquer une unité,

🌐 des exigences sur les quantités produites,

🌐 le coût d'acquisition d'une unité de chaque ressource,

🌐 le profit unitaire pour chaque produit,

🌐 les niveaux de demande de chaque produit,

déterminer le niveau de production **optimal** pour chaque produit afin de maximiser le profit tout en respectant toutes les conditions.

Types de contraintes

- ④ **Capacité:** Limites sur la disponibilité des ressources, capacité de production, de transport, de stockage, ...
- ④ **Demande:** Exigences minimales de production : prévisions de vente, contrats, niveaux des commandes, ...
- ④ Les « recettes » de production apparaissent dans les contraintes de capacité ou de demande
- ④ À venir:
 - ④ Niveau des inventaires et relations entre les périodes
 - ④ Conservation des « flux »
 - ④ ...

— Programmation linéaire — résolution —

- ④ Solutions graphiques : pour illustrer les caractéristiques des modèles et méthodes de programmation linéaire
- ④ Méthode du *simplexe* : ce qui est le plus largement utilisé et inclus dans tous les logiciels
- ④ Autres méthodes (ex: de point intérieur) pour des cas « extrêmes »
- ④ Analyse de sensibilité : validation des résultats et analyse de scénarios; réalisée à partir de la solution optimale
- ④ De nombreux logiciels

Solution graphique

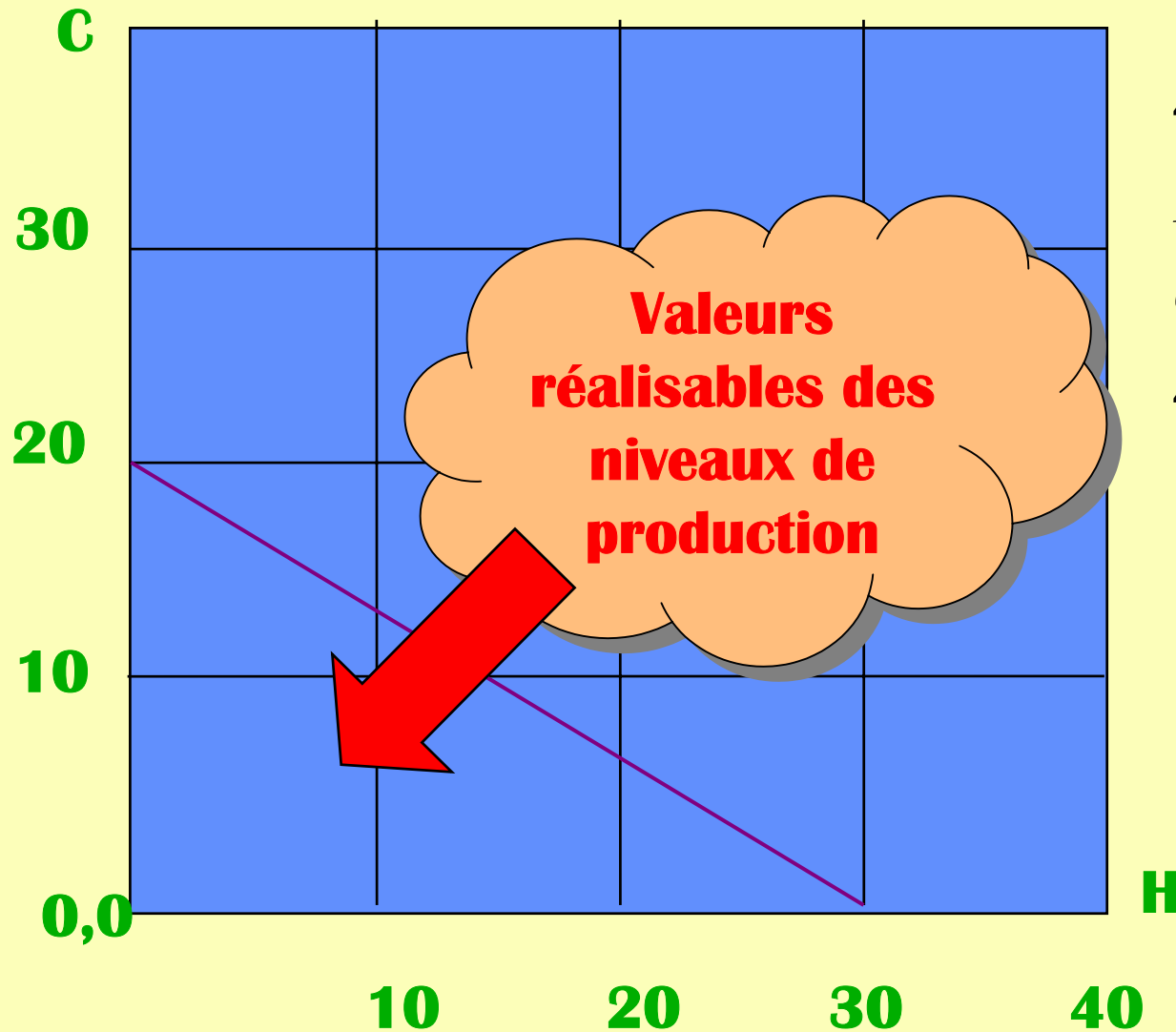
Maximiser $Z = 2H + 4C$

$4H + 6C \leq 120$ (heures machines A)

$2H + 6C \leq 72$ (heures machines B)

$1C \leq 10$ (heures machines C)

$H, C \geq 0$ (non-négativité)

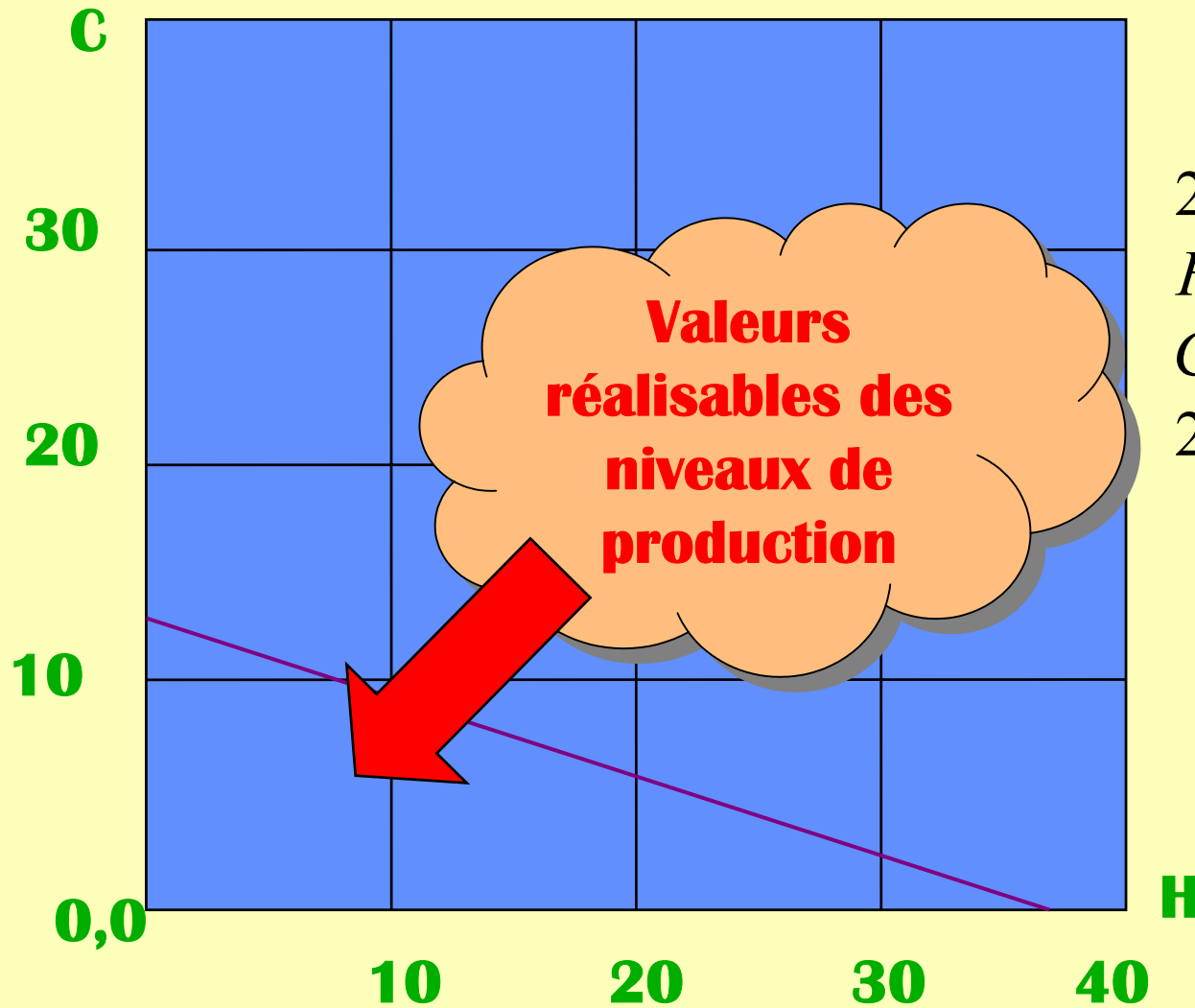


$$4H + 6C = 120$$

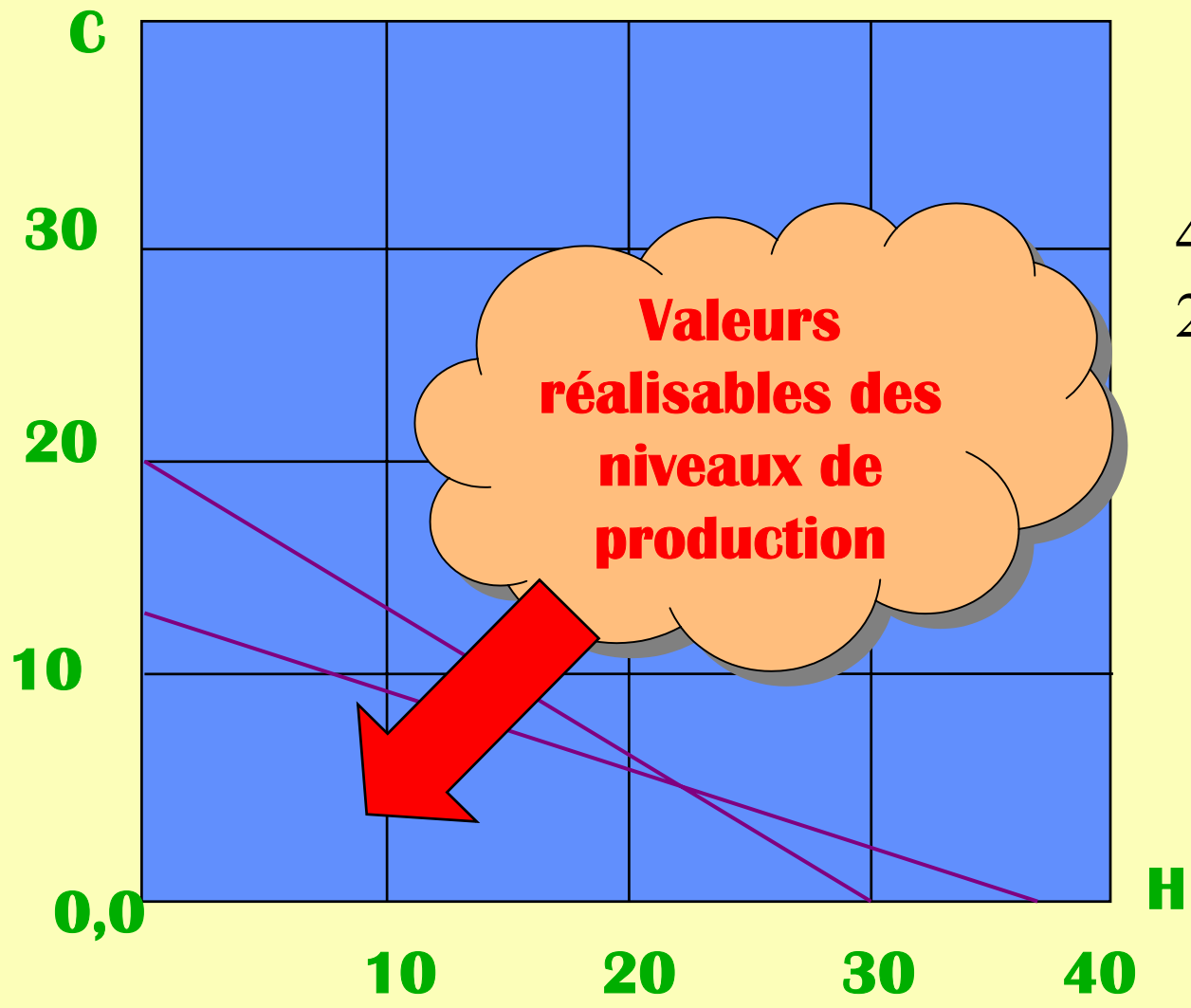
$$H = 0 \Rightarrow C = 20$$

$$C = 0 \Rightarrow H = 30$$

$$4H + 6C \leq 120$$



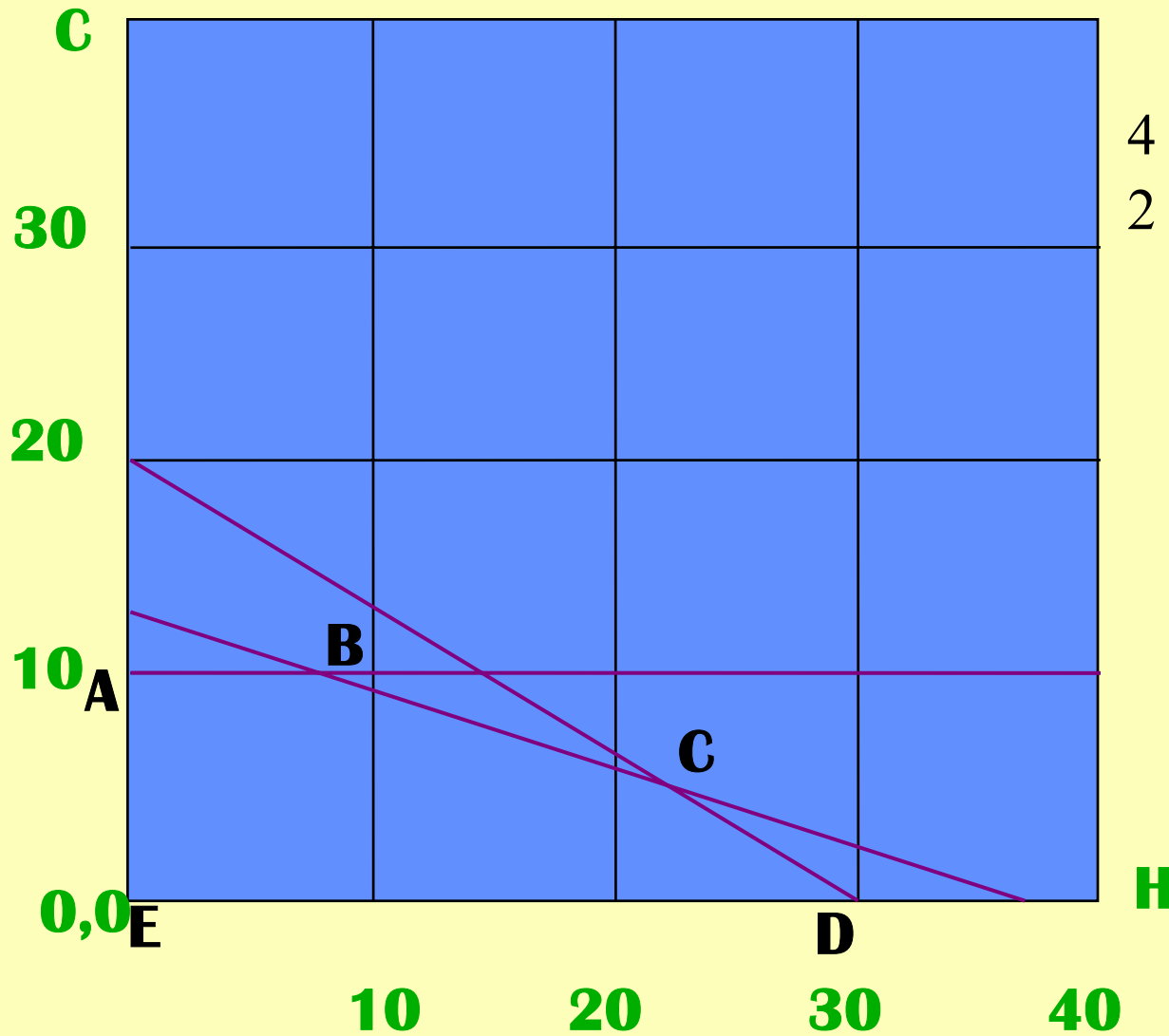
$$2H + 6C = 72$$
$$H = 0 \Rightarrow C = 12$$
$$C = 0 \Rightarrow H = 36$$
$$2H + 6C \leq 72$$



$$4H + 6C \leq 120$$

$$2H + 6C \leq 72$$

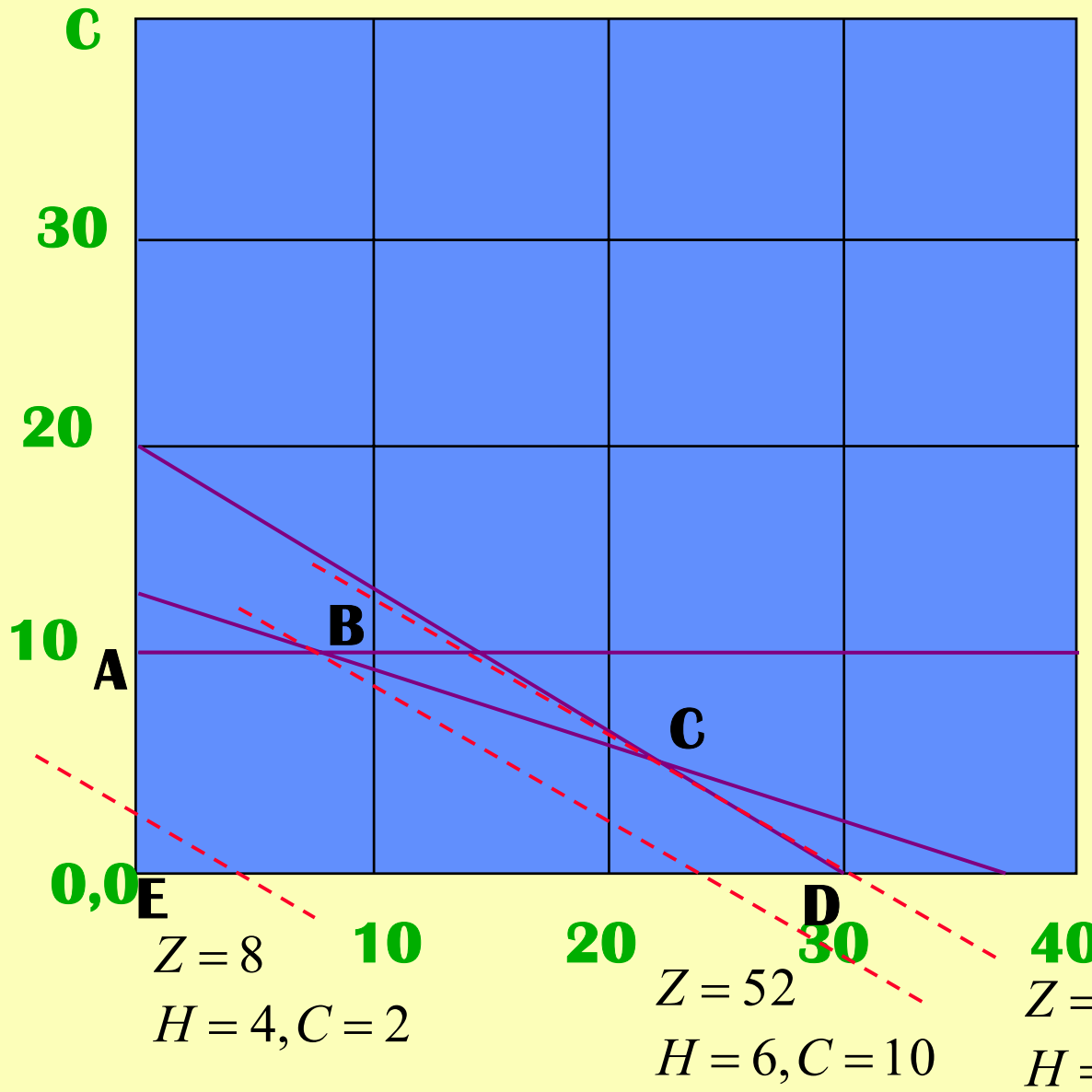
Valeurs réalisables des niveaux de production



$$4H + 6C \leq 120$$

$$2H + 6C \leq 72$$

$$C \leq 10$$



Solution

- ④ Nombre de bâtons (H) à fabriquer: 24
- ④ Nombre de jeux d'échecs (C) à fabriquer: 4
- ④ Profit prévu : 64\$

Méthode du simplexe

- ④ Méthode algébrique itérative
- ④ Solutions toujours dans un « coin » (point extrême) du domaine réalisable :
 - ④ Si n variables (ex. 100 produits possibles) et m contraintes (ex. 25 limites de capacité, demande, etc.), le simplexe ne choisira que m (25) produits (au plus) !!
- ④ La méthode passe de « coin » en « coin », en modifiant le choix des m variables et l'écriture des équations, guidée par les contributions relatives (marginales) des variables au profit

Analyse post-optimale

- ④ Effectuée afin de
 - ④ Compenser les hypothèses déterministes et faire face à l'imprévu
 - ④ Identifier les éléments critiques
 - ④ Analyser des scénarios et établir des plans de contingence
 - ④ Modifier les modèles

Analyse post-optimale

🌐 Questions: à partir de la formulation initiale

🌐 Si le profit unitaire change, est-ce que la solution optimale change?

🌐 De combien le niveau de la ressource peut baisser sans qu'on doive reprogrammer la chaîne de production?

🌐 Quel serait l'impact de l'amélioration de la productivité d'un atelier?

🌐 Doit-on se lancer dans la production d'un nouveau produit?

🌐 ...

🌐 Réponses: à partir de la solution optimale

Types d'analyses post-optimales

🌐 Sensibilité

Quelles sont les limites de la variation d'un élément du problème sans que la solution optimale change?

🌐 variation des coefficients de coût

🌐 variation des membres droits

🌐 variation des coefficients technologiques

🌐 Paramétrique

Modifications successives d'un élément.

🌐 Introduction de nouvelles activités
(variables)

🌐 Introduction de nouvelles restrictions
(contraintes)