révision de

MATHEMATIQUES

par Pierre Cornélis, ON7PC rue J. Ballings, 88 1140 Bruxelles

Le programme HAREC préconise que tous les candidats qui présentent l'examen de radioamateur aient les notions suivantes

- *addition, soustraction, multiplication et division*
- *fractions*
- *puissance de dix et exposants*
- *racine carrée*
- *valeur inverse*
- *interprétation de graphique linéaire et non linéaire*

Il n'y a pas de question sur les mathématiques dans le programme HAREC, mais des connaissances élémentaires sont requises pour suivre le cours et pour faire les exercices.

Les candidats radioamateurs n'ont pas nécessairement tous la même formation. Certains ont une bonne formation dans le cadre d'un enseignement secondaire, d'autres ont une formation technique ou scientifique et pour eux les rappels ci-dessous paraîtront enfantins. Pour ceux qui n'ont pas cette formation, nous avons essayé de donner les notions imposées par le programme HAREC et nécessaire à la compréhension de certaines parties du cours de formation pour radioamateur.

Puisque l'IBPT n'autorise pas l'emploi de machines à calculer électronique, nous vous conseillons donc de vous entraîner à faire le calcul à la main.

Les nombres

L'exemple le plus simple d'un nombre entier est le nombre d'enfants dans une famille : dans une famille il y a 2, 3, 4, 5, ou plus d'enfants, on dit que 2, 3, 4, 5, etc. … sont des **nombres entiers**.

Les **nombres premiers** sont ceux qui ne peuvent être divisible que par eux-mêmes ou l'unité : exemple : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, … sont des nombres premiers.

Si on calcule l'âge moyen des enfants d'une même famille, on trouvera un nombre qui n'est pas entier. Si les 3 enfants ont respectivement 21, 19 et 15 ans, l'âge moyen est de 55/3 = 18,3333 ; 18,3333 est un **nombre réel.** La séparation se fait "officiellement" par une **virgule** … mais comme les Américains séparent par un point appelé **point décimal**, on prend parfois l'habitude d'utiliser ici aussi le point décimal.

Addition, soustraction, multiplication et division

Ayant définit les nombres, nous allons maintenant pouvoir effectuer des "opérations" sur les nombres.

addition	soustraction	multiplication	division	
+	-	x	:	
1247	6 256	817	624	17
+ 828	- 145	x 53	51	36,7…
2075	6 111	2451	114	
		40850	102	
		43301	120	
			119	
			1	

Remarque : le signe "multiplié" (x) peut être remplacé par un simple point (.) ou par un (*). Donc on trouvera soit la forme

817 x 53 ou 817 . 53 ou 817 * 53 ces trois expressions sont identiques.

Les fractions

Une fraction est une partie de l'unité (exemple 1/3) ou une partie d'un nombre entier (exemple 5/8). Une fraction comporte un numérateur (au-dessus de la ligne) et un dénominateur (en dessous de la ligne).

On utilise les fractions lorsqu'on exprime le diamètre d'un fil de cuivre en dixième de millimètres, un temps en quarts d'heure etc.

La propriété fondamentale des fractions est qu'on ne modifie pas une fraction si on multiplie le dénominateur et le numérateur par un même nombre, donc 5/25 = 1/5 = 20/100. A l'inverse on ne modifie pas une fraction si on divise le dénominateur et le numérateur par un même nombre, c'est dernière opération s'appelle **simplifier une fraction**. La fraction 18/12 peut se simplifier en 3/2, mais quand il n'existe aucun nombre entier qui puisse diviser le numérateur et le dénominateur, on parle de **fraction irréductible**.

Des nombres tels que 5,375 sont appelés **fractions décimales.** 5,375 c'est en fait 5 + 375/1000

Addition et soustractions de fractions

Il faut pour cela que le dénominateur soit commun et ceci nécessite parfois une opération de transformation.
Exemples :
5/16 + 6/16 = 5+ 6 / 16 = 11/16
4/30 + 6/20 = 4 x 20 / 30 x 20 + 6 x 30 / 20 x 30 = 80/600 + 180/600 = 260/600

Multiplication de fractions
On multiplie ensemble les numérateurs et on multiplie ensemble les dénominateurs
Exemples :
2/3 x 3/8 = 6/24

Division de fractions
Il suffit d'inverser la deuxième fraction et de faire la multiplication des numérateurs et des dénominateurs
Exemples :
2/3 : 4/9 = 2/3 x 9/4 = 18/12

Les puissances et les exposants

Si nous multiplions 4 trois fois par lui-même, nous écrirons

$$\boxed{4 \times 4 \times 4 = 4^3 \text{ on dit "4 exposant 3"}}$$

On dit que 4 est la **base** et 3 est la **puissance** (l'index ou l'exposant).

Si on considère $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^5$ nous pouvons encore écrire $(4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4)$ ou $4^2 \times 4^3$ donc pour multiplier deux nombres ayant la même base, il suffit d'ajouter les exposant ou sous une forme générale :

$$b^n \times b^m = b^{(n+m)}$$

Si on considère $(2^2)^3 = (2 \times 2)^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2) \times (2 \times 2) = 2^6$ donc pour élever un nombre exponentiel à une puissance, il suffit de multiplier les exposants ou sous une forme plus générale :

$$(b^n)^m = b^{(n * m)}$$

Deux exposants tout à fait remarquable sont zéro et un : en effet

$$x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^1 = x\,.$$

Les exposants négatifs correspondent à des racines : $x^{-2} = \sqrt{x}$ $\quad x^{-3} = \sqrt[3]{x}$ $\quad$ etc … ou encore

$$x^{-n} = {}^{n}\bar{0}x$$

Il faut donc bien retenir :

$$\boxed{\begin{array}{c} b^n \times b^m = b^{(n+m)} \\ (b^n)^m = b^{(n * m)} \\ x^0 = 1 \quad \text{et} \quad x^1 = x\,. \\ x^{-n} = {}^{n}\bar{0}x \end{array}}$$

Les puissances dix et les exposants de dix

On a parfois besoin d'utiliser dans les calculs de circuits électriques, des nombres très grands ou très petits. Il est alors commode d'utiliser des puissances de 10 (le nombre 10 affecté d'un exposant). On évite ainsi d'alourdir les calculs et les résultats d'expressions telles que million, milliard, millionième ou milliardième.

Ainsi 1000 qui est égal à $10 \times 10 \times 10$, c'est à dire à un produit contenant trois fois le facteur 10, se représente par 10^3 , qui s'énonce "**10 puissance 3**".

Il y a deux puissances particulières :

- 10 puissance 2 qui se dit encore **10 au carré**, et,
- 10 puissance 3 qui se dit encore **10 au cube**.

En somme, on simplifie l'écriture dans les calculs en remplaçant

1	par 1×10^0
10	par 1×10^1
100	par 1×10^2
1000	par 1×10^3
10000	par 1×10^4
100000	par 1×10^5

1000000	par 1×10^6
10000000	par 1×10^7
100000000	par 1×10^8
1000000000	par 1×10^9
etc	

L'exposant que l'on place en haut et à droite du nombre 10 est égal au nombre de zéro que comporte le nombre représenté, exemple $1000000 = 1 \times 10^6$ comporte bien 6 zéros.

Nous venons de voir les exposants pour de grandes valeurs, nous allons voir qu'ils sont également très utiles pour les petites valeurs.

Pour les nombres décimaux, les exposants expriment le nombre de chiffres après la virgule. Dans ce cas ils sont précédés du signe -. On remplacera donc :

0,1	par 1×10^{-1}
0,01	par 1×10^{-2}
0,001	par 1×10^{-3}
0,0001	par 1×10^{-4}
0,00001	par 1×10^{-5}
0,000001	par 1×10^{-6}
etc …	

Par exemple $0{,}001 = 1 \times 10^{-3}$ comporte bien 3 chiffres après la virgule.

Encore quelques exemples:
$24500 = 24{,}5 \times 1000 = 24{,}5 \times 10^3$ et cela se lit "vingt quatre virgule cinq dix exposant trois"
$1250000 = 1{,}25 \times 1000000 = 1{,}25 \times 10^6$
$0{,}025 = 25 / 1000 = 25 \times 10^{-3}$ et cela se lit "vingt cinq dix exposant moins trois"
$0{,}0000000072 = 7{,}2 / 1000000000 = 7{,}2 \times 10^{-9}$

Il est difficile d'écrire des exposants avec des afficheurs 7 segments ou des afficheurs LCD des machines à calculer. On emploie alors une autre forme d'écriture :
$2{,}56\ 10^{-7}$ devient **2,56E-7** et lisez cela "deux virgule cinquante six dix exposant moins sept"
$8{,}569\ 10^{12}$ devient **8,569E12 .**

Les facteurs de multiplication et les préfixes

Nous allons prendre un exemple qui nous intéresse directement : L'unité de courant est l'ampère, mais en électronique les courants sont relativement faibles et au lieu d'écrire 15×10^{-3} A on préfère utiliser l'expression milliampère c.-à-d. des millièmes d'ampère et d'écrire 15 mA. Le tableau ci-après reprend les différents préfixes de multiplication.

yotta	Y	10^{24}	1 000 000 000 000 000 000 000 000
zetta	Z	10^{21}	1 000 000 000 000 000 000 000
exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
giga	G	10^9	1 000 000 000
mega	M	10^6	1 000 000
kilo	k	10^3	1 000
hecto	h	10^2	100
déca	da	10^1	10
			1
déci	d	10^{-1}	0,1
centi	c	10^{-2}	0,01
milli	m	10^{-3}	0,001
micro	µ	10^{-6}	0,000 001
nano	n	10^{-9}	0,000 000 001

pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001
femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001
atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001
zepto	z	10^{-21}	0,000 000 000 000 000 000 001
yocto	y	10^{-24}	0,000 000 000 000 000 000 000 001

Pour une unité donnée, on n'utilise pas nécessairement tous les préfixes. Comme nous l'avons dit, en électronique, on utilisera principalement des milliampères représentés par mA, parfois des microampères représenté par µA et rarement des nanoampères représenté par nA. En électricité on parlera principalement en Ampère, sans faire appel aux facteurs de multiplication. Mais lorsqu'on parle de cabines de distribution de courant à basse tension, ou lorsqu'on étudie les phénomènes de foudre on parlera de kiloampère représenté par kA.

Les résistances sont souvent exprimées en ohm (W) ou en kiloohm (kW). Pour les fortes résistances et pour les résistances d'isolation on parlera en mégohm (MW). Pour les shunts d'ampèremètres et pour les résistances de contact, on parlera en milliohm (mW).

Pour les condensateurs on parlera essentiellement en microfarad (µF), en nanofarad (nF) et en picofarad (pF). Pour les très gros condensateurs de filtrage, on parle parfois de millifarad (mF).
Pour les fréquences on parlera essentiellement en Hertz (Hz) , en kilohertz (kHz) dans le domaine des fréquences audio, et on parlera en termes de kilohertz (kHz) , mégahertz (MHz) ou gigahertz (GHz) pour le domaine des radiofréquences.

Il est absolument indispensable de pouvoir "jongler" avec les **Giga,** les **Méga,** les **kilo,** avec les **milli, les micro,** les **nano** et les **pico**. Notez bien que kilo s'écrit avec un k minuscule ! Il est absolument indispensable de connaître le tableau ci-dessous. Il faut simplement savoir que d'autres facteurs (tels que les yotta-, zetta-, exa-, peta- , tera- et femto-, atto- , zepto- et yocto-) existent !

giga	**G**	$\mathbf{10^{9}}$	**1E9**	**1 000 000 000**
méga	**M**	$\mathbf{10^{6}}$	**1E6**	**1 000 000**
kilo	**k**	$\mathbf{10^{3}}$	**1E3**	**1 000**
milli	**m**	$\mathbf{10^{-3}}$	**1E-3**	**0,001**
micro	**µ**	$\mathbf{10^{-6}}$	**1E-6**	**0,000 001**
nano	**n**	$\mathbf{10^{-9}}$	**1E-9**	**0,000 000 001**
pico	**p**	$\mathbf{10^{-12}}$	**1E-12**	**0,000 000 000 001**

Il est indispensable de pouvoir passer facilement d'un préfixe à l'autre, ou de passer d'une expression avec préfixe vers les unités.

Exemples :
12 mA = 0,012 A = 12.000 µA = 12.000.000 nA
22 W = 0,022 kW = 0,000 022 MW = 22.000 mW
3900 W = 3,9 kW = 0,0039 MW
150 kW = 150 000 W = 0,15 MW
25 mW = 0,025 W
47.000 µF = 47 mF
0,1 µF = 100 nF = 100.000 pF
2,2 nF = 2200 pF
1750 Hz = 1,75 kHz
14 260 kHz = 14,260 MHz
1260 MHz = 1,26 GHz

Opérations sur les nombres avec des exposants

Additions et soustractions avec des exposants

Les nombres avec exposants ne peuvent être **additionnés** ou **soustraits** que si les exposants sont les mêmes. Si les exposants ne sont pas les mêmes, il faut d'abord transformer les nombres pour que les exposants soient les mêmes.
Exemples
$5,6 \times 10^{-6} + 12 \times 10^{-6} = 17,6 \times 10^{-6}$
$43000 + 5730 = 43 \times 10^{3} + 5,73 \times 10^{3} = 48,73 \times 10^{3}$
$840 \times 10^{3} - 32 \times 10^{2} = 840 \times 10^{3} - 3,2 \times 10^{3} = 836,8 \times 10^{3}$

Multiplications avec les exposants

Il suffit de multiplier les nombres entre eux et de faire la somme des exposants.
Exemples
$(45 \times 10^{4}) \times (2 \times 10^{2}) = 90 \times 10^{6}$
$(34 \times 10^{5}) \times (5 \times 10^{-7}) = 170 \times 10^{-2}$

Divisions avec les exposants

Il suffit de diviser les nombres entre eux et de faire la soustraction des exposants.
Exemples
$(45 \times 10^{6}) : (2 \times 10^{2}) = 22,5 \times 10^{4}$
$(35 \times 10^{9}) : (5 \times 10^{-7}) = 7 \times 10^{2}$

Quelques cas spéciaux

1) Dans une fraction, si un nombre avec un exposant passe du numérateur au dénominateur (ou inversement), il change de signe :
1
$= 1 \times 10^{6}$
1×10^{-6}
2) Pour élever un exposant au carré, on multiplie celui-ci par 2
$(7,898 \times 10^{3})^{2} = 7,898^{2} \times 10^{6}$

3) Pour extraire la racine carrée d'un exposant, on divise celui-ci par 2
- dans le cas où l'exposant est pair :

$$\sqrt{25 \times 10^{8}} = \sqrt{25} \times \sqrt{10^{8}} = 5 \times 10^{4} = 50000$$

- dans le cas où l'exposant est un nombre impair, on le transforme d'abord en nombre pair :

$$\sqrt{25 \times 10^{7}} = \sqrt{2,5 \times 10^{8}} = \sqrt{2,5} \times \sqrt{10^{8}} = 1,58 \times 10^{4} = 15800$$

Les logarithmes

Si $N = 10^{x}$ alors on dit, que par définition, le logarithme de N vaut x ou $\log_{10}(N) = x$, le nombre 10 est appelé la base. Si la base est 10, on parle de logarithmes décimaux.

$$\boxed{\log_{10}(N) = x \quad \text{si} \quad 10^{x} = N}$$

Remarquons qu'au lieu d'écrire $\log_{10}$ on écrit simplement log.

Par conséquent

log 10	= 1	car $10^1 = 10$
log 100	= 2	car $10^2 = 100$
log 1000	= 3	car $10^3 = 1000$
log 1	= 0	car $10^0 = 1$
log 0,1	= -1	car $10^{-1} = 0,1$
log 0,01	= -2	car $10^{-2} = 0,01$
log 0,001	= -3	car $10^{-3} = 0,001$

Les relations fondamentales sont :

$$\boxed{\begin{array}{c} \log (A \times B) = \log A + \log B \\ \log (A/B) = \log A - \log B \\ \log A^m = m \times \log A \\ \log 1 = 0 \\ \log_a a = 1 \end{array}}$$

En plus de la définition (log 10 = 1 évidemment !), il suffit de retenir 3 logarithmes pour se "débrouiller" :

$$\boxed{\log 2 = 0,301 \quad , \quad \log 3 = 0,477 \quad \text{et} \quad \log 7 = 0,845}$$

à partir de là, on peut calculer les log de 4 : 4 c'est 2² donc log 4 = 2 x log 2 = 2 x 0,301 = 0,602

log de 8 : 8 c'est 2² donc log 8 = 3 x log 2 = 3 x 0,301 = 0,903

log de 9 : 9 c'est 3² donc log 9 = 2 x log 3 = 2 x 0,477 = 0,954

log de 5 : 5 c'est 10/2 donc log 5 = log 10 – log 2 = 1 – 0,301 = 0,699

log de 6 : 6 c'est 2 x 3 donc log 6 = log 2 + log 3 = 0,301 + 0,477 = 0,778

En fait pour calculer des logarithmes, on utilise plutôt une calculette électronique.
Toutefois la base peut être un autre nombre, si la base est e (e=2,71828) on parle de logarithmes naturels ou Népériens, ces logarithmes sont représentés par **ln**. Les relations fondamentales sont valables quelle que soit la base.
Pour le changement de base est $\mathbf{\log_a y = \log_b y / \log_b a}$ ou plus pratiquement :

$$\boxed{\begin{array}{c} \ln N = \log N / \ln e = 2.30259 \log N \\ \log N = \ln N / \log 10 = 0.43429 \ln N \end{array}}$$

Chiffres significatifs

Si on fait certains calculs, on peut arriver à des résultats qui comportent de nombreux chiffres, par exemple
2 : 3 = 0,666666666666666
ou 2879 x 125 = 359875

Pour un commerçant ou pour un banquier il est important de trouver au franc près, exactement la même somme dans ses coffres que ce qui est écrit dans ses livres ; si un commerçant à vendu 125 pièces à 2879 F, il est important de retrouver exactement 359.875 F en caisse.

Toutefois pour la plupart de nos applications nous n'aurons pas besoin de tous ces chiffres, on ne va pas chercher une résistance de 359875 ohms chez le marchand de résistances, mais plutôt une résistance de 360000 ohms ou 360 kiloohms. On limite donc l'écriture aux chiffres les plus **significatifs**.

La notation scientifique et la notation d'ingénieur

La notation scientifique consiste à utiliser les exposants et de limiter le nombre de chiffres significatifs. Par exemple $3{,}6754\ 10^{5}$ ou $16{,}98\ 10^{-7}$

La notation d'ingénieur consiste à utiliser les exposants multiples de 3 et de limiter le nombre de chiffres significatifs. Par exemple $7{,}1076\ 10^{6}$ ou $3{,}648\ 10^{-12}$

Séparation entre les milliers

Afin de rendre la lecture plus facile, on sépare parfois les milliers par un petit espace, parfois par un point, mais notez bien que les Américains séparent avec des "virgules" ce qui provoque parfois des confusions.

Fonctions monoadiques et dyadiques

Une fonction monoadique se rapporte à un seul nombre, par exemple la racine carrée, le logarithme, les fonctions trigonométriques… Par contre l'addition, la soustraction, a multiplication, la division sont des fonctions dyadiques, car elles nécessitent deux nombres.

Approximations

Dans certains cas il n'est pas indispensable de calculer avec une grande précision, mais, il est important d'avoir un "ordre de grandeur". Si par exemple vous devez connaître la dissipation d'une résistance de 50 ohms sous une tension de 13,8 V , vous appliquerez la relation $P = U^2/R$.

Si vous faites une approximation, vous direz que la puissance c'est presque (15 x 15) / 50, on peut simplifier en divisant par 5 au numérateur et au dénominateur, donc c'est presque (3 x 15) / 10, c'est donc 45/10, c'est donc "à peu près" 4,5 Watts, mais comme la tension n'est pas de 15 V mais bien de 13,8 V, ce sera un peu moins de 4,5 watts disons 4 Watts …

En réalité si vous utilisez la machine à calculer vous trouverez 13,8 x 13,8 / 50 = 3,8088 Watts

En pratique, il n'y aura pas beaucoup de différence puisque si la résistance doit dissiper 4 Watts ou 3,808 Watts, vous prendrez de toutes façons une résistance qui peut dissiper 7 ou 10 Watts par mesure de sécurité !

En faisant de telles approximations, on combine donc les simplifications avec un certain "feeling" et avec un peu d'entraînement on arrive à évaluer assez correctement.

Racine carrée

On appelle racine carrée d'un nombre A, le nombre a qui élevé au carré est égal à A donc

$$\boxed{\sqrt{A} = a \text{ parce que } a^2 = A}$$

Ainsi la $\sqrt{4} = 2$ car $2^2 = 4$, la $\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$., la $\sqrt{16} = 4$ car $4^2 = 16$ etc … On dit que les nombres 4 , 9 , 16, 25 , etc … sont des carrés parfaits car leur racine carrée est un nombre entier.

Il en est autrement lorsqu'on cherche la $\sqrt{3}$, celle-ci vaut 1,73205080757.

Deux racines carrées particulières doivent être retenue par cœur, car elle revienne souvent en électronique :

Ō2 = 1,4142

Ō3 = 1,7321

Racine carrée d'une puissance paire

√$2^8 = 2^4$

√$10^4 = 10^2$

Racine carrée d'un nombre exprimé sous forme scientifique

√25 10^4 = 5 10^2

√810 10^7 = Ö 81 10^8 = 9 10^4

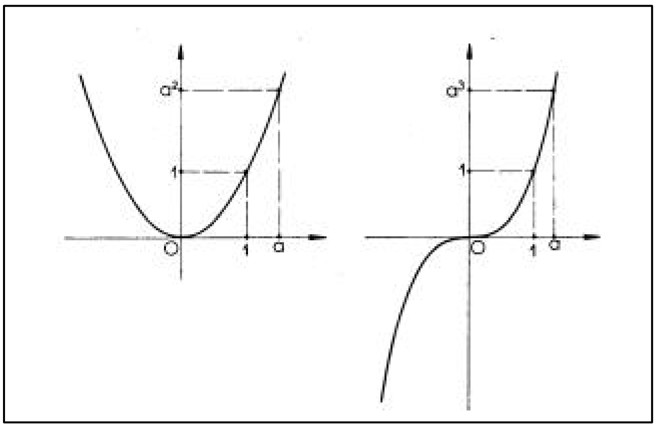
et lorsqu'il ne s'agit pas de carré parfait, on peut faire des approximations, par exemple √396 = ? Raisonnons de la façon suivante 396 c'est presque 400 et 400 = 20 donc √396 c'est un peu moins de 20, on pourrait dire que √396 = 19. La machine à calculer donnera évidemment la bonne solution avec une très bonne précision.

Valeur inverse

L'inverse de a est 1/a , en d'autres termes si on multiplie un nombre par sa valeur inverse on retrouve le nombre 1. La valeur inverse de 5 est donc 0,2 car 5 x 0,2 = 1.

Interprétation de graphique linéaire et non linéaire

En mathématique on définit des fonctions telles que $x = a^2$ ou $x = a^3$. Pour montrer comment évolue x, on trace un **graphique**



En physique, et par conséquent également en électricité et en électronique on a l'habitude de noter des valeurs de grandeurs physiques (longueurs, temps, tension, courant, …) et de les représenter sous forme graphique. On pointe ces valeurs sur une feuille de papier et trace une courbe qui passe par le plus de points possibles, en donnant à cette courbe la ligne la plus "jolie" possible.

Selon l'application on utilisera du **papier millimétré** ou du papier avec une **échelle logarithmique**.

Transformations de formules

Dans le cours de radioamateur, il arrivera bien souvent de devoir manipuler les formules. Il faut retenir que tout ce qui change de côté change de signe. Autrement dit ce qui était "+" d'un côté du signe = devient "-", tout ce qui était "x" d'un côté du signe = devient " :".

Voici quelques transformations usuelles :

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$	**donne** $A \times D = B \times C$	
$D \times A = B \times C$	**donne** $D = \frac{B \times C}{A}$	
$- B = C + D - \frac{A}{E}$	**donne** $B = - C - D + \frac{A}{E}$	**ou** $B = - C - D + \frac{A}{E}$

$U = R\,I$	**donne** $I = U / R$	**ou** $R = U / I$
$P = U\,I$	**donne** $U = P / I$	**ou** $I = P / U$
$P = R\,I^2$	**donne** $I = \sqrt{P / R}$	**ou** $R = P / I^2$
$P = U^2 / R$	**donne** $U = \sqrt{P\,R}$	**ou** $R = U^2 / P$

Lorsque vous avez une équation compliquée, commencez d'abord par résoudre les opérations entre parenthèses, et pour cela calculez d'abord!

- les puissances et les racines
- puis les multiplications et les divisions (en partant de la gauche vers la droite)
- puis les additions et les soustractions.

Les éléments qui suivent ne doivent pas être connus pour l'examen IBPT (ni pour l’examen HAREC), toutefois, il est peut être utile de les connaître.

NOMBRES IMAGINAIRES

Lorsqu'on étudie le comportement des selfs et des condensateurs en courants alternatifs on constate qu'il y a un déphasage de 90° entre le courant et la tension.

Comme un déphasage de 180° peut être représenté par l'opérateur "-1" (ou simplement par "-"), on peut concevoir j comme l'opération, qui réalisé deux fois de suite donne un retard de 180° donc $j \times j = -1$, en d'autres termes $j = \sqrt{-1}$,. Donc le signe "-" correspond à un déphasage de 180° et le signe "j" correspond à une avance de phase de 90° et "-j" correspond à un retard de phase de 90°.

Or, lorsqu'on étudie les racines carrées, il apparaît qu'il est impossible de trouver la racine carrée d'un nombre négatif, puisqu'en élevant au carré on obtient toujours un nombre positif (+ par + donne + et - par - donne + !). On a donc "inventé" la notion de **nombre imaginaire** ... A l'opposé, les autres nombres sont des nombres réels.

En fait "**j**" n'est qu'un "attireur d'attention", sa présence signifie simplement qu'il faut faire attention, car en plus de la relation entre la tension et le courant, il existe une relation de phase de 90 degrés. Ce "j" est donc purement symbolique, on aurait tout aussi bien pu entourer un nombre imaginaire d’un cercle, on aurait très bien pu surligner en vert tout ce qui est +j et en rouge tout ce qui est -j. Mais il n'est pas commode de se balader avec deux surligneurs en poche et on utilise donc "+j" ou "-j" comme opérateurs imaginaires.

Un nombre complexe comporte un nombre réel et un nombre imaginaire, il est de la forme $x = a + jb$. Pour effectuera les calculs sur des nombres complexes en les traitant comme des équations algébriques en gardant séparé les valeurs réelles et imaginaires:

- deux nombres complexes sont égaux, si leur parties réelles sont égales et si les parties imaginaires sont égales, c'est pourquoi on tend toujours à regrouper d'une part les termes réels ensemble et d'autres part les termes imaginaires ensemble. C'est sur ce principe très simple que repose presque tout le calcul des circuits d'adaptation.

- la table des puissances de j :

$$\boxed{j = \sqrt{-1} \qquad j^2 = -1 \qquad j^3 = -j \qquad j^4 = +1}$$

- un produit tout à fait remarquable est $(a + jb) \times (a - jb)$ ce qui donne $a^2 + jba - jba - j^2b^2$ soit $a^2 + b^2$ et oh miracle il n'y a plus de terme imaginaire ! on dit que $(a - jb)$ est le **conjugué** de $(a + jb)$

- on ne peut pas diviser directement une valeur par $a + jb$ et lorsqu'il apparaît un terme $a + jb$ au dénominateur d'une expression, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $a - jb$

Notez que les mathématiciens utilisent la lettre **i** pour représenter l'opérateur **i**maginaire, c'est plus logique, mais cela embrouille l'esprit des électriciens et des électroniciens pour qui la lettre i ou I est synonyme de "courant", c'est pourquoi nous utiliserons la lettre **j** .

MACHINE A CALCULER

Faire toutes les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, calculer des logarithmes, des fonctions trigonométriques, des racines carrées, des inverses... à la main et/ou à l'aide de table de logarithmes ou de tables trigonométriques à calcul est d'un temps révolu.

L'emploi de la règle à calcul a fortement simplifié les calculs que les électroniciens devaient faire, mais il y a beaucoup mieux : la **machine à calculer électronique** encore appelé "**calculette**".

Certaines de ces machines à calculer sont plutôt destinées aux opérations commerciales, elles ne comportent que les 4 opérations fondamentales et le pourcentage. Ce n'est pas le genre de machine qui nous convient à nos applications.

Pour nous radioamateurs, il est souhaitable d'acquérir une machine à calculer électronique appelée "**scientifique**", possédant

- les quatre opérations fondamentales **+** , **-** , **x** et ¸
- l'élévation au carré avec la touche **x² ,**
- les racines carrées avec une touche **Õ x** ,
- les puissances dans le sens de puissances quelconques avec la touche **y^x ,**
- les inverses avec la touche **1/x** ,
- les fonctions exponentielles (c.-à-d. les logarithmes inverses) avec les touches notées **10^x** et **e^x** ,
- les fonctions logarithmiques : logarithme en base 10 souvent noté **LOG** et , logarithme naturel noté **LN** ,
- les fonctions trigonométriques c.-à-d. les sinus avec la touche **SIN**, cosinus **COS** et tangente **TANG**, et les fonctions trigonométriques inverses ASIN, ACOS, et ATAN qui permettent de retrouver l'angle à partir de son sinus, de son cosinus ou de sa tangente,
- le choix des unités d'angles : les degrés, les radians ou les grades
- la notation scientifique (calculs avec les exposants) qui affiche UN seul chiffre avant la virgule, plusieurs chiffres après la virgule et 10 exposant quelque chose. On trouve alors une touche notée . **EE**, **EXP** ou **EEX** . En général sous la forme 1,23E6 qui correspond à $1,23 \times 10^6$

Facultativement, vous pouvez acquérir une machine plus sophistiquée permettant

- le format ingénieur, qui affiche un format semblable au format scientifique, mais l'exposant de 10 est un multiple de 3 (10^3 , 10^6 , 10^9 , 10^{12}... ou 10^{-3} , 10^{-6} , 10^{-9} , 10^{-12}...) ,
- le choix du nombre de décimale,
- une ou plusieurs mémoires,
- la notation polonaise inverse (RPN Reverse Polish Notation) :

Sur la plupart des calculettes, on utilise la **notation algébrique**. En d'autres termes, on introduit les nombres comme ils apparaissent dans les équations, pour faire 25 x 7 on entre effectivement "25" , puis "X" puis "7" puis on appuie sur "=". Le résultat apparaît alors …

Sur une machine à **notation polonaise inverse (RPN)**, on utilise le concept de "pile de calcul". Pour faire 25 x 7 on entre "25", puis "ENTER", puis "7" puis "X" et le résultat apparaît alors. Lorsqu'on fait les opérations manuellement on écrit d'abord le nombre "25", puis on va à la ligne (ceci correspond au ENTER), puis on écrit "7", puis on fait la multiplication (ceci correspond au "X"), c.-à-d. q'on fait 7 x 5 = 35, on écrit 5 on reporte 3. et 7 x 2 = 14, on ajoute le report donc 14 + 3 = 17 . La notation RPN ressemble fortement à la manière selon laquelle on fait l'opération. Lorsque les calculs comportent beaucoup de parenthèses la notation polonaise inverse conduit à employer moins de touches que la notation normale. Une machine RPN déroute en général le béotien qui n'y trouve plus la touche "=".

Dans l'enseignement général on préconise plutôt les machines à notations algébriques, les écoles d'ingénieurs, de physiciens et de mathématiciens préconisent la notation polonaise inverse.

En dehors des machines scientifiques, de la notation algébrique et de la notation polonaise inverse, il existe encore des machines spécialement adaptées aux calculs des hommes d'affaires (les machines "businness"), des machines ultra simple avec des grandes touches et de grands afficheurs pour les commerçants, etc …

La plupart des machines à calculer algébrique ou RPN comportent aussi une touche marque **2ND** ou **INV** ou encore une touche de couleur, en appuyant su cette touche et sur une des touches de fonctions, on a alors accès à un autre groupe de fonctions. Les fonctions √ x et x² , SIN et ASIN , sont ainsi souvent groupé sur une même touche.

Il existe aussi des **machines à calculer programmable**. Elles permettent de répéter les opérations et les calculs sans répéter les frappes sur le clavier. Il existe enfin des machines à calculer qui permettent de **résoudre des équations mathématiques**, de trouver les racines (les valeurs par laquelle elle passe par zéro) , de résoudre des intégrales, les matrices,…

Si vous êtes débutant et si vous devez acheter une machine à calculer, achetez plutôt une simple machine à calculer scientifique simple qu'une "grosse" machine capable de faire des graphiques, résoudre des équations, etc... Plus tard, s'il vous faut vraiment une machine plus puissante il sera encore temps de penser à en acheter une plus performante. Dans ce domaine là il y a aussi une constante évolution.

Quoiqu'il en soit la machine à calculer ne sera pas uniquement indispensable pour le cours, mais un radioamateur en aura besoin pour effectuer différents calculs lors d'élaboration de projets.

ELEMENTS D'ALGEBRE

L'algèbre est une branche des mathématiques où on utilise des symboles pour représenter des variables. Une équation algébrique contient une expression algébrique et le signe =. L'algèbre permet de résoudre ces équations. Les physiciens, les électriciens, les électroniciens, et les radiotechniciens que nous sommes ont l'habitude d'écrire les phénomènes qu'ils observent sous forme d'équations. La manipulation de ces équations permet bien souvent d'expliquer des phénomènes ou de calculer des circuits. L'algèbre doit donc être considérée comme un "outils" de travail.

Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2\,ab - b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3\,a^2b + 3\,ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$$

Equations

1 er degré	1 inconnue	$\mathbf{ax + b = 0}$	$x = - b/a$
	2 inconnues	$\mathbf{ax + by = c}$	$x = cb' - bc' / ab' - ba'$
		$\mathbf{a'x + b'y = c'}$	$y = ac' - ca' / ab' - ba'$
2 nd degré		$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$	$x = -b \pm \sqrt{(b^2 - 4\,ac)}$

Analyse combinatoire

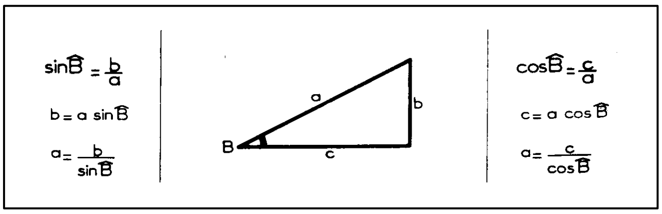
permutation	arrangement	combinaison
deux permutations diffèrent par l' **ordre** des éléments	deux arrangements diffèrent par la **nature** des objets ou leur **ordre**	deux combinaisons diffèrent par la **nature** des objets
$P_n = n\,(n - 1)\,(n - 2)\,(n - 3) \ldots 1$ $P_n = n\,!$	$A^p_n = n\,(n - 1)\,(n - p + 1)$ $A^p_n = n\,! / (n - p)!$	$C^p_n = n\,(n - 1) \ldots (n - p + 1) / p\,!$ $C^p_n = n\,! / p!\,(n - p)\,!$

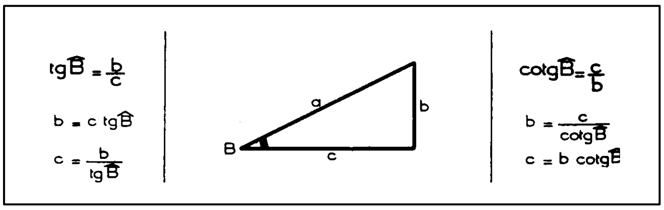
ELEMENTS DE TRIGONOMETRIE

La trigonométrie est une branche des mathématiques qui concerne les angles et les côtés des triangles.

Définitions

2 p radians = 360 degrés = 400 grades





p = 3,14159265359

Quelques valeurs particulières

sin 0° = 0	cos 0° = 1	tg 0° = 0	cotg 0° = ∝
sin 30° = 0,5	cos 30° = 0,866		
sin 45°= 0,707	cos 45° = 0,707	tg 45° = 1	cotg 45° = 1
sin 60° = 0,866	cos 60° = 0,5		
sin 90° = 1	cos 90° = 1	tg 90° = ∝	cotg 90° = 0

conversion: pente (%) = tg a x 100

Relations entre les rapports trigonométriques

$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$

tg a = sin a / cos a

cotga = cos a / sin a = 1 / tg a

sec a = 1 / cos a

cosec a = 1 / sin a

Formules de Simpson

sin (a+b) = cos b sin a + sin b cos a

cos (a + b) = cos a cos b - sin a sin b

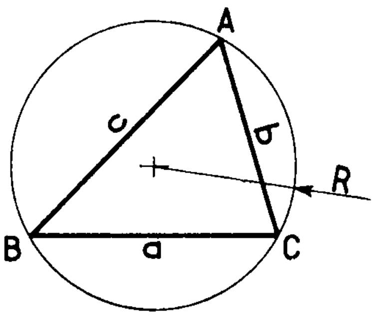
Arcs doubles

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

Résolution de triangles quelconques

⑤



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$$

$a = 2R \sin \hat{A}$	$\sin \hat{A} = a : 2R$
$b = 2R \sin \hat{B}$	$\sin \hat{B} = b : 2R$
$c = 2R \sin \hat{C}$	$\sin \hat{C} = c : 2R$

ELEMENTS DE CALCUL BINAIRE

Systèmes de numération

- Dans le système décimal on compte 0, 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9, à la dixième valeur on écrit 0 et on reporte 1 au chiffre d'ordre supérieur …
- Dans le système binaire on compte 0, 1 à la deuxième valeur on écrit 0 et on reporte 1 au chiffre d'ordre supérieur …
- Dans le système octal on compte 1,2, 3, 4, 5, 6, 7 à la huitième valeur on écrit 0 et on reporte 1 au chiffre d'ordre supérieur …
- Dans le système décimal on compte 1,2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F à la seizième valeur on écrit 0 et on reporte 1 au chiffre d'ordre supérieur …

Puissances de 2

	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	
etc …	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	etc …
			etc …	1000000	100000	1000	100	10	1	0	0,1	0,01	0,001	etc ..

	2^{64}	…	2^{32}	…	2^{16}	…	2^{12}	2^{11}	2^{10}
etc …	$1{,}844\ 674\ 40734\ 10^{19}$		4 294 967 196		65 536		4096	2048	1024

Logarithmes en base 2

Il suffit d'appliquer la définition, par exemple $\log_2 256 = 8$ car $2^8 = 256$!

Conversion rapide décimal/binaire

37 : 2 = 18 reste 1 (LSD)

18	9	0
9	4	1
4	2	0
2	1	0

donc 37 = 10100

Multiplication et division par des puissances de 2

13 x 32	1101 x 1000000 = 1101000000	on ajoute le nombre de zéro correspondant à la puissance
27 : 4	11011 : 100 = 110,11	on place la virgule au nombre correspondant à la puissance

Expressions fractionnaires

Que vaut 27/64 ? 27 = 11011 et 64 = 1000000 donc 27/64 = 0,0011011

Addition, soustraction et multiplication

Table d'addition
0 + 0 = 0
10 + 1 = 1
1 + 0 = 0
1 + 1 = 10

Table de multiplication
0 x 0 = 0
1 x 0 = 0
0 x 1 = 0
1 x 1 = 1

Exemple d'addition

```
  101101
+ 10111
 1000100
```

Exemple de soustraction
soit 110100101 - 110100
on prend le complément du nombre à soustraire et on fait l'addition

```
  110100101
+ 111001100
   10111001
```

Exemple de multiplication

```
    1101
    x101
    1101
    0000
  1101
 1000001
```

Octal

Lorsqu'on manipule des nombres binaires, on obtient des longues suites de 1 et 0, et on fait rapidement une erreur. Une façon de résoudre ce problème est d'utiliser la représentation octale dont la base est 8. Chaque groupe de 3 digits est remplacé par son équivalent en base 8

binaire	octal
000	0
001	1
010	2
011	3
100	4
101	5
110	6
111	7
000	8

Ainsi 011110010 se traduit par 368_8 le "8" en indice signifie que ce nombre est un nombre octal

```
0  1  1 | 1  1  0 | 0  1  0
   3    |    6    |    2
```

Hexadécimal

Une autre façon consiste à utiliser la base 16, on obtient alors la représentation hexadécimale. De 0 à 9 il n'y a pas de problème, on peut utiliser les chiffres, mais à partir de 10, on utilise les lettres A, B, C, D, E et F.

binaire	hexadécimal
0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	A
1011	B
1100	C
1101	D
1110	E
1111	F

ainsi 11110010 se traduit par $F2_{16}$

1 1 1 1	0 0 1 0
F	2

Mise à jour le 22 février 2000